Correction - Devoir maison M

Partie A

k	-	0	1	2
U	0	$0-0+3=3$	$9-2+3=10$	$30-4+3=29$

L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

1. $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$.

2. Montrons par récurrence que, la propriété P(n) : $u_n \geq n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \geq 0$. La propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour **un certain** entier naturel n, $u_n \geq n$ et montrons que la propriété est vraie au rang n + 1 : $u_{n+1} \geq n+1$.

On sait que $u_n \geq n$ donc $3u_n \geq 3n$ (car 3 > 0) et $3u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3$.

Or $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$, on en déduit $u_{n+1} \geq n+3$.

Or $n + 3 \geq n + 1$, on en déduit donc que $u_{n+1} \geq n+1$.

La propriété est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : La propriété étant vraie au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1, on a : pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

3. a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Grâce au théorème de comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3$.

Or, on a démontré que : pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

Donc, $2u_n \geq 2n$, donc $2u_n - 2n \geq 0$ et donc $2u_n - 2n + 3 \geq 3 \geq 0$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite est croissante.

4. a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ avec q= 3 et $v_0 = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ .Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - n + 1 \Leftrightarrow u_n = v_n + n - 1$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.