Correction - Devoir maison N

Exercice 1

a. Pour tout n, entier strictement positif, $\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2 = n^2+1$ et $\left(n+\frac{1}{2n}\right)^2 = n^2+2\times n\times\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2} = n^2+1+\frac{1}{4n^2}$. On a donc

$n^2 \le \left(\sqrt{n^2+1}\right)^2 \le \left(n+\frac{1}{2n}\right)^2$. On en déduit que $n \le \sqrt{n^2+1} \le n+\frac{1}{2n}$,

puisque n est positif et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

b. Pour tout n, entier strictement positif, $n \le \sqrt{n^2+1} \le n+\frac{1}{2n}$ donc $0 \le \sqrt{n^2+1}-n \le \frac{1}{2n}$, c'est-à-dire $0 \le u_n \le \frac{1}{2n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$,

donc, en utilisant le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

a. Pour démontrer que u est infinie, il faut et il suffit de montrer que, pour tout entier n positif, u_n existe. Or u_n n'existera pas si et seulement si

$u_{n-1} = -3$. Lorsqu'on aura prouvé que, pour tout n, u_n est entre 0 et 1, on aura alors prouvé que u_n ne peut jamais valoir -3, et qu'ainsi la suite est infinie.

On peut par ailleurs écrire :

Pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3} = \frac{2u_n+6-4}{u_n+3} = 2-\frac{4}{u_n+3}$.

Montrons par récurrence sur n que u_n est toujours compris entre 0 et 1.

La propriété est vérifiée pour $n = 0$ puisque $u_0 = 0$.

Supposons la propriété vraie pour un certain n. On a alors $0 \le u_n \le 1$.

On a donc $3 \le u_n+3 \le 4$. Comme les bornes sont strictement positives, on peut affirmer que $\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_n+3} \le \frac{1}{3}$, puis, en multipliant par -4 qui est négatif, $-\frac{4}{3} \le -\frac{4}{u_n+3} \le -1$, d'où $\frac{2}{3} \le 2-\frac{4}{u_n+3} \le 1$. On a donc bien $0 \le u_{n+1} \le 1$.

b. Pour tout entier n, $u_{n+2}-u_{n+1} = \left(2-\frac{4}{u_{n+1}+3}\right)-\left(2-\frac{4}{u_n+3}\right)$

$= -\frac{4}{u_{n+1}+3}+\frac{4}{u_n+3} = \frac{-4u_n-12+4u_{n+1}+12}{(u_{n+1}+3)(u_n+3)} = \frac{4(u_{n+1}-u_n)}{(u_{n+1}+3)(u_n+3)}$.

Comme la suite est bornée entre 0 et 1, le dénominateur est strictement positif et donc $u_{n+2}-u_{n+1}$ et $u_{n+1}-u_n$ sont bien de même signe.

c. On peut donc affirmer que, pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n$ a même signe que $u_1-u_0 = \frac{2}{3}-0 = \frac{2}{3} > 0$. Donc la suite est croissante.

La suite est croissante et majorée par 1 donc elle converge. Si on note L sa limite, alors, par opérations sur les limites et unicité de la limite, L vérifie $L = \frac{2L+2}{L+3}$. On sait que L est compris entre 0 et 1 donc L + 3 n'est jamais nul. Cette équation est équivalente à $L^2+L-2=0$ qui a pour solutions 1 et -2. Donc $L = 1$.