Correction - Devoir maison O

Exercice 1

1. *f* est une fonction rationnelle définie sur $[0\,;1]$ donc dérivable sur $[0\,;1]$.

Pour tout *x* de $[0\,;1]$, $f'(x)=\dfrac{3(x+4)-(3x+2)}{(x+4)^2}=\dfrac{10}{(x+4)^2}$. Alors *f'* est strictement positive sur $[0\,;1]$ donc *f* est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1$.

Initialisation : $u_0=0$; $u_1=\dfrac{1}{2}$; alors $0\le u_0\le u_1\le 1$.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel *n*, $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1$ et prouvons que $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le 1$.

De $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1$, par croissance de *f* sur $[0\,;1]$, on a : $f(0)\le f(u_n)\le f(u_{n+1})\le f(1)$.

Comme $f(0)=\dfrac{1}{2}$ et $f(1)=1$, alors $0\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le 1$.

Conclusion La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, on en déduit que pour tout entier naturel *n*, $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1$.

3. D'après les inégalités précédentes, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Par le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel noté L.

Comme pour tout entier naturel *n*, $0\le u_n\le 1$, par passage à la limite, on a $0\le \mathrm{L}\le 1$. Déterminons L : De $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{L}$ et $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$. On déduit :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\mathrm{L}$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}=\dfrac{3\mathrm{L}+2}{\mathrm{L}+4}$, par limite de somme, produit et quotient

  (car $L+4\neq 0$) et par unicité de la limite : $\mathrm{L}=\dfrac{3\mathrm{L}+2}{\mathrm{L}+4}$.

Or pour tout réel L de $[0\,;1]$, $\mathrm{L}=\dfrac{3\mathrm{L}+2}{\mathrm{L}+4}\Leftrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{L}+4)=3\mathrm{L}+2\Leftrightarrow \mathrm{L}^2+\mathrm{L}-2=0$.

L'équation $\mathrm{L}^2+\mathrm{L}-2=0$ a pour solutions –2 et 1.
Comme L appartient à $[0\,;1]$, alors L = 1.
Ainsi (u_n) est convergente et sa limite vaut 1.