



Correction - Devoir maison P

Exercice 1

A) Pour $N = 2$, le tableau à compléter est le suivant :

K	W	U	V
0		2	10
1	2	14 / 3	8
2	14 / 3	52 / 9	43 / 6

B) 1. a. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = -\frac{4(2u_n + v_n) - 3(u_n + 3v_n)}{12} = \frac{5u_n - 5v_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

b. (w_n) est donc géométrique de raison $5/12$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$. Donc, pour tout entier

naturel n , $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

c. On a donc pour tout entier naturel n , $w_n > 0$ donc $v_n > u_n$.

$$-1 < \frac{5}{12} < 1 \text{ donc } \lim\left(\frac{5}{12}\right)^n = 0 \text{ et ainsi } \lim w_n = 0.$$

2. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{1}{3}w_n$. Or la suite w est positive. Donc la suite u est croissante.

3. (u_n) est croissante de premier terme $u_0 = 2$, donc, pour tout n , $u_0 \leq u_n$.

On a vu aussi que, pour tout n , $w_n > 0$ donc $u_n < v_n$.

Enfin, (v_n) est décroissante de premier terme $v_0 = 10$, donc, pour tout n , $v_n \leq v_0$.

On a donc bien, pour tout n , $u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$.

4. (u_n) est croissante majorée par $v_0 = 10$, elle est donc convergente.

(v_n) est décroissante minorée par $u_0 = 2$, elle est donc convergente.

5. Notons respectivement L et L' leurs limites.

On a vu que la suite (w_n) a pour limite vers 0.

De plus, pour tout n , $w_n = v_n - u_n$ donc $\lim w_n = L' - L$. Donc $L = L'$.

Remarque : On peut aussi montrer que $L = L'$ grâce à la récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ qui, par passage à la limite,

$$\text{donne : } L = \frac{2L + L'}{3}, \text{ i.e. } 3L = 2L + L', \text{ i.e. } L = L'.$$

6. a. Pour tout n entier naturel, $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4}$

$$t_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n = 3u_n + 4v_n = t_n. \text{ Donc la suite } (t_n) \text{ est bien constante.}$$

b. La suite (t_n) est constante, donc pour tout n , $t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 46$.

On a alors, pour tout n , $3u_n + 4v_n = 46$ et donc $3L + 4L = 46$ d'où $L = \frac{46}{7}$.