Devoir maison P

La clarté et la précision des raisonnements compteront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Soignez la rédaction !

Exercice 1

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

Partie A : On considère l'algorithme suivant :

Variables	*N* et *K* sont des entiers
	U, *V*, *W* sont des réels
Initialisation	Affecter 0 à *K*, Affecter 2 à *U*
	Affecter 10 à *V*
	Saisir *N*
Traitement	Tant que $K < N$
	Affecter $K + 1$ à *K*, Affecter *U* à *W*
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à *U*, Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à *V*
	Fin Tant Que
Sortie	Afficher *U*, Afficher *V*

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.

Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	*W*	*U*	*V*
0			
1			
2			

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b. Pour tout entier n, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

c. En déduire la limite de la suite (w_n) et que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

2. Démontrer que (u_n) est croissante. On admettra que (v_n) est décroissante.

3. Déduire des questions précédentes que pour tout entier n, $u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

5. Soit L et L' les limites de (u_n) et (v_n). Grâce à 1. C., montrer que $L = L'$.

6. a. Montrer que la suite (t_n) définie sur N par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

b. En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.