TD 1 (2 PAGES)

De la résolution d'équations aux nombres complexes.

I Les équations du second degré - Moyen-âge arabe


Al-Khwarizmi
IVème siècle

Au Moyen-Age, les savants arabes reprennent et enrichissent les écrits grecs et indiens. Ils progressent notamment dans la résolution des équations. Ainsi au IX ème siècle à Bagdad, **Al-Khwarizmi** publie *Al-djabr*, qui traite en particulier des équations du second degré.
Par exemple, il reprend un vieux problème grec de Diophante : trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit. Il constate que cela revient à résoudre une équation du second degré.

1. Déterminer deux nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit 1.
2. Etablir dans le cas général une formule pour trouver deux nombres de somme S et de produit P.

II Les équations du troisième degré - Renaissance italienne.

1 Un peu d'histoire.


Cardan
1501-1576

Le savoir des Arabes s'est transmis en Europe par l'Espagne (Tolède), les croisades, les voyages (Fibonacci, Marco Polo ...).Dans la première moitié du XVI ème siècle, en Italie du Nord (Bologne, Pise ...), des savants (del Ferro, Fior, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli) cherchent à résoudre les équations du 3e degré, de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec a, b, c, d des réels. Une première étape, démontrée par Cardan, permet de ramener toute équation de degré 3 à une équation sans terme de degré 2 de la forme $x^3 = px + q$.

2 Un premier exemple : $x^3 = 6x + 40$

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - 6x - 40$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 = 6x + 40$.
3.
   a. Déterminer une solution entière, α, de cette équation.
   b. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = (x - \alpha)\left(ax^2 + bx + c\right)$.
   c. En déduire la résolution de $x^3 = 6x + 40$.

3 Le cas général

Dans le cas général, en utilisant un changement de variable et le résultat établi à la question I.2, Cardan a démontré qu'une solution de $x^3 = px + q$ est

$$x = \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

où le nombre $x^{\frac{1}{3}}$, appelé racine cubique de x, est l'unique réel positif tel que $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x$.

1. Appliquer cette formule pour déterminer une solution de $x^3 = 6x + 40$.
2. Résoudre, à l'aide de cette formule, $x^3 = 18x + 35$.

III De l'audace de Bombelli à la création des nombres complexes.

Bombelli est un disciple de Cardan. Dans son *Algebra* (1572), il explique comment il résout l'équation

$$x^3 = 15x + 4$$

Bombelli
1526-1572

1. Appliquez les formules ci-dessus pour résoudre cette équation. Que remarque-t-on ?

2. L'écriture $x = \left(2 - 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2 + 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$ n'a a priori pas de sens. Mais Bombelli décide d'aller plus loin...

   a) En appliquant les règles usuelles de calcul sur les puissances et les racines carrées, montrer que

   $$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \; et \; (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

   b) En déduire qu'une solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$ est égale à 4.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessous, $\sqrt{-1}$? Ce nombre $\sqrt{-1}$, notée i plus tard par Euler, va susciter beaucoup de méfiance pendant prés de deux siècles...