# TD 3 (3 PAGES)

## Exercice 1

1. Déterminer les formes algébriques des nombres complexes

$Z_1 = (1-3i)^2$ ; $Z_2 = i^{16} + i^{10} + i^5$ ; $Z_3 = \dfrac{15,4-0,2i}{2-i}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on note *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives $Z_1$, $Z_2$ et $Z_3$.
Déterminer l'affixe du point *D* tel que *ABCD* soit un parallélogramme.

## Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par *A* et *B* les points d'affixe respective 1 et −1.

Soit *f* la transformation qui, à tout point *M* d'affixe $z \neq 1$, associe le point $M'$ d'affixe $z' = \dfrac{1-z}{\bar{z}-1}$.

*Les quatre questions sont indépendantes.*

1. Soit *C* le point d'affixe $z_C = -2+i$.

a. Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point *C'*, image du point *C* par la transformation *f*.

b. Montrer que les points *A*, *C* et *C'* sont alignés.

2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.

b. Interpréter géométriquement.

3. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec *x*, *y*, *x'* et *y'* réels.

a. Calculer *x'* et montrer que $y' = \dfrac{2y(1-x)}{(x-1)^2 + y^2}$.

b. Déterminer l'ensemble des points *M* dont l'image *M* ' est située sur l'axe des réels.

4. Déterminer l'ensemble des points invariants par *f*, c'est-à-dire l'ensemble des points d'affixe *z* vérifiant $z' = z$.

Exercice 3

On considère la suite $(z_n)$ de nombres complexes définie par $z_0 = 0$ et,

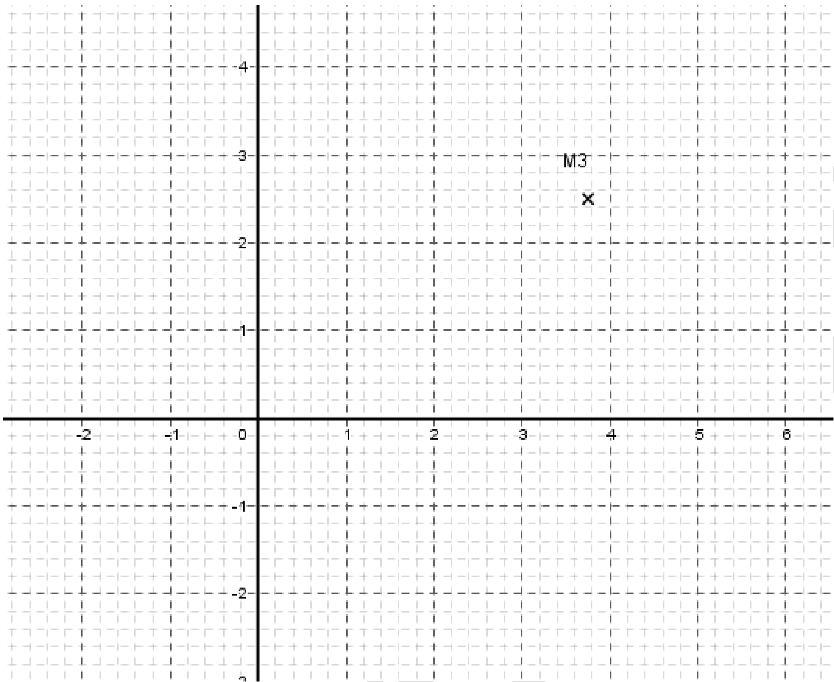
pour tout entier naturel *n*, $z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note $M_n$ le point d'affixe $z_n$ et on considère le complexe $z_A = 4 + 2i$

et *A* le point du plan d'affixe $z_A$.

1. Déterminer les affixes des points $M_{0,}M_1, M_2, M_3.$

Placer ces points ainsi que le point *A* sur le graphique rapporté au repère orthonormé $\left(0,\vec{u},\vec{v}\right)$.




2. Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = z_n - z_A$

   a. Montrer que, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$.

   b. En déduire la nature de la suite $(u_n)$.

   c. Montrer alors, que, pour tout entier naturel, $z_n = (4+2i)\left(1 - \left(\frac{1}{2}i\right)^n\right)$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, les points *A*, $M_n$ et $M_{n+2}$ sont alignés.

Exercice 4

Soit les nombres complexes $Z_1 = 3 + 2i$, $Z_2 = \dfrac{2+6i}{3-i}$ et $Z_3 = \left(\dfrac{1-3i}{2}\right)^2$.

a. Déterminer les formes algébriques de $Z_2$ et $Z_3$.

b. Placer les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$, d'affixes respectives $Z_1$, $Z_2$ et $Z_3$, dans un repère.

c. Construire le point $M_4$ tel que $M_1M_2M_3M_4$ soit un parallélogramme et déterminer son affixe $Z_4$.

Exercice 5

À tout point *M* d'affixe *z* du plan, on associe le point *M'* d'affixe *z'* par l'application *f* qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}.$$

1. Soit les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 3$ et $z_C = 3i$.

a. Déterminer les affixes des points *A'*, *B'* et *C'*, images respectives de *A*, *B* et *C* par *f* et placer les points *A*, *B*, *C*, *A'*, *B'* et *C'* dans le repère ci-contre dans une autre couleur que celle utilisée dans l'exercice précédent.

b. Montrer que les points *A'*, *B'* et *C'* sont alignés.

2. On pose *z* = *x* + *iy* et *z'* = *x'* + *iy'* (avec *x*, *y*, *x'* et *y'* réels).

a. Déterminer *x'* et *y'* en fonction de *x* et *y*.

b. En déduire que l'ensemble des points *M* du plan complexe, tels que *M'* appartienne à l'axe des réels, est la droite (*OA*).

3. a. Exprimer *y'* en fonction de *x'*.

b. Que peut-on en déduire pour les points *M'* ? Justifier.