TD 4 (2 PAGES)

Exercice 1

Résoudre dans C les équations suivantes :

On donnera les solutions éventuelles sous leur forme algébrique.

a. $5z+2i=(1+i)z-3$

b. $(4+i)z=4\overline{z}-6i$

c. $(z^2+z-2)(z^2-3z+7)=0$

Exercice 2

1) Montrer que, pour tout nombre complexe *z*, le nombre $z-\overline{z}$ est un nombre imaginaire pur.

2) *Application* : Montrer que si deux nombres complexes *z* et *z'* vérifient :

$\overline{z+iz'}=z-iz'$ alors *z* et *z'* sont réels.

Exercice 3

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

AFFIRMATION 1 Dans l'ensemble des nombres complexes, le nombre $z_0=-1-\frac{2}{3}i$ est l'unique solution de l'équation $\frac{\overline{z}-1}{z+i}=2$, où $\overline{z}$ est le conjugué de *z*.
AFFIRMATION 2 $S=\sum_{k=0}^{2018} i^k=1+i+i^2+...+i^{2018}$ est un imaginaire pur.
AFFIRMATION 3 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, l'ensemble des points *M* d'affixes *z* tels que $z'=z^2+2z+9$ est un réel, est une droite.
AFFIRMATION 4 Soit *z* un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z=\frac{iz}{z-2}$ *Z* est un imaginaire pur si et seulement si *z* est réel.

Exercice 4

On pose $a=\sqrt{3}+i$ et $z=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

a. Déterminer, en détaillant les calculs, les formes algébriques de a^2 , a^3 et z^2 .

b. En déduire la forme algébrique de z^6 .

Exercice 5

Résoudre, dans l'ensemble C des nombres complexes, les équations suivantes :

1. $\dfrac{iz+2}{z+1}=\dfrac{1}{2}$

2. $\bar{z}-3iz-3+6i=0$

Exercice 6

Soit (*E*) l'équation : $2z^3+(2i-5)z^2+(4-5i)z+4i=0$.

a. Montrer que (*E*) admet une solution imaginaire pure à déterminer, donc une solution de la forme *ib* avec *b* réel.

b. Montrer que, pour tout nombre complexe *z*,

$2z^3+(2i-5)z^2+(4-5i)z+4i=(z+i)\left(2z^2-5z+4\right)$.

c. En déduire la résolution de (*E*) dans C.