

TD 1 (4 PAGES)

Exercice 1

Soit A et B deux événements tels que

$$P(A) = 0,3 \quad ; \quad P(B) = 0,6 \quad ; \quad P(A \cup B) = 0,8$$

Déterminer $P_B(A)$, $P_A(B)$.

Exercice 2

Soit A et B deux événements. Déterminer

$$P_A(\bar{A}) \quad ; \quad P_{A \cap B}(A) \quad ; \quad P_B(A \cup B)$$

Exercice 3

Dans une animalerie, il n'y a que deux aquariums :

- l'aquarium A , qui contient 5 poissons rouges et 6 poissons noirs
- et l'aquarium B , qui contient 9 poissons rouges et 3 poissons noirs.

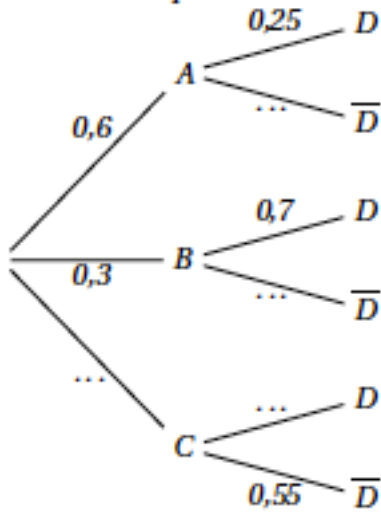
Un client vient acheter un poisson. Il choisit l'un des deux aquariums puis demande au vendeur de pêcher au hasard un poisson dans cet aquarium. Les deux aquariums sont placés de telle manière que la probabilité que le client choisisse l'aquarium A est $\frac{3}{5}$ et on suppose que, dans les deux aquariums, chaque poisson a autant de "chances" d'être pêché.

On note A (resp. B) l'événement "le client choisit l'aquarium A (resp. B)" et R (resp. N) "le poisson pêché est rouge (resp. noire)".

1. Calculer $P_A(R)$ et $P(A \cap R)$.
2. Déterminer $P(R)$.
3. Le poisson pêché est rouge. Quelle est la probabilité qu'il provienne du bassin A ?

Exercice 4

On considère l'arbre de probabilité ci-dessous :



1. Donner $P_C(\bar{D})$.
2. Déterminer $P_A(\bar{D})$ et $P(C)$.
3. Déterminer $P(B \cap \bar{D})$.
4. Calculer $P(D)$.

Exercice 5

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A »;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B »;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \bar{S}$?
 b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides. Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Exercice 6

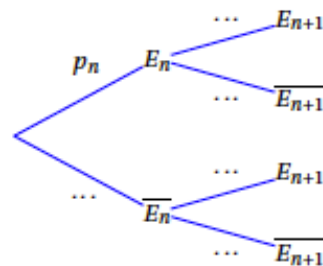
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

- Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
 - Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
 - Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
 - En déduire la limite de la suite (p_n) .
- e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur $J + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
 Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête?

Exercice 7

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'événement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
 - a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?
 - b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie?
4. On choisit cinq animaux au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

- a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
- b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

LEMAZZURIER