T-S	DS4 TYPE de mathématiques
2 séquences	Calculatrice autorisée

Exercice 1

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

Partie A : On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et K sont des entiers
	U, V, W sont des réels
Initialisation	Affecter 0 à K, Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
Traitement	Tant que $K < N$
	Affecter $K + 1$ à K, Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U, Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin Tant Que
Sortie	Afficher U, Afficher V

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.

Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	*W*	*U*	*V*
0			
1			
2			

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b. Pour tout entier n, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

c. En déduire la limite de la suite (w_n) et que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

2. Démontrer que (u_n) est croissante. On admettra que (v_n) est décroissante.

3. Déduire des questions précédentes que pour tout entier n, $u_0 \leq u_n < v_n \leq v_0$

4. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

5. Soit L et L' les limites de (u_n) et (v_n). Grâce à **1. C.,** montrer que $L = L'$.

6. a. Montrer que la suite (t_n) définie sur **N** par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

b. En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

Exercice 2

Résoudre dans **C** les équations suivantes :

On donnera les solutions éventuelles sous leur forme algébrique.

a. $(4+i)z = 4\bar{z} - 6i$

c. $(z^2 + z - 2)(z^2 - 3z + 7) = 0$

Exercice 3

1) Montrer que, pour tout nombre complexe z, le nombre $z - \bar{z}$ est un nombre imaginaire pur.

2) *Application* : Montrer que si deux nombres complexes z et z' vérifient :

$\overline{z + iz'} = z - iz'$ alors z et z' sont réels.

Exercice 4

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une affirmation est proposée.
Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

AFFIRMATION 1

Dans l'ensemble des nombres complexes, le nombre $z_0 = -1 - \frac{2}{3}i$ est l'unique solution de l'équation $\frac{\overline{z} - 1}{z + i} = 2$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

AFFIRMATION 2

$S = \sum_{k=0}^{2018} i^k = 1 + i + i^2 + \ldots + i^{2018}$ est un imaginaire pur.

AFFIRMATION 3

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, l'ensemble des points M d'affixes z tels que $z' = z^2 + 2z + 9$ est un réel, est une droite.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixe respective 1 et −1.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1 - z}{\overline{z} - 1}$.

Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$

Soit C' l' image du point C par la transformation f. On note $z_{C'}$ son affixe.

Les points A, C et C' sont alignés.