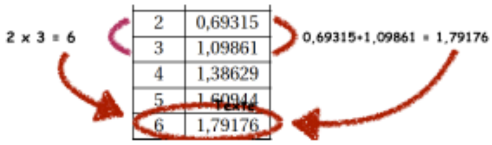
TD 1 (2 PAGES)

Activité 1 - *Un peu d'Histoire* -

"L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.", (Laplace)

La fin du XVIe siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic,Kepler...). Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles.
Pour simplifier ces calculs, on cherche à construire des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondance les nombres de telle manière qu' ***à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite.*** La première table de ce type est publiée par l'Ecossais **John Neper** en 1614, après quarante ans de travail ! On en donne un extrait dans le tableau ci-dessous.

Exemple :
$2 \times 3 = 6$.
Le "2" de la colonne de gauche correspond au "0,69315" de la colonne de droite ; 3 correspond à 1,09861.
Or $0,69315 + 1,09861 = 1,79176$.
Et 1,79176 (dans la colonne de droite) est bien le nombre correspondant à 6 (dans la colonne de gauche).



0.1	...
0.5	...
1	...
1.5	...
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	1,79176
7	1,94591
8	2,07944
9	2,19722
10	2,30259
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	2,70805
16	2,77259
17	2,83321
18	2,89037
19	2,94444
20	2,99573
21	...
22	...
100	...

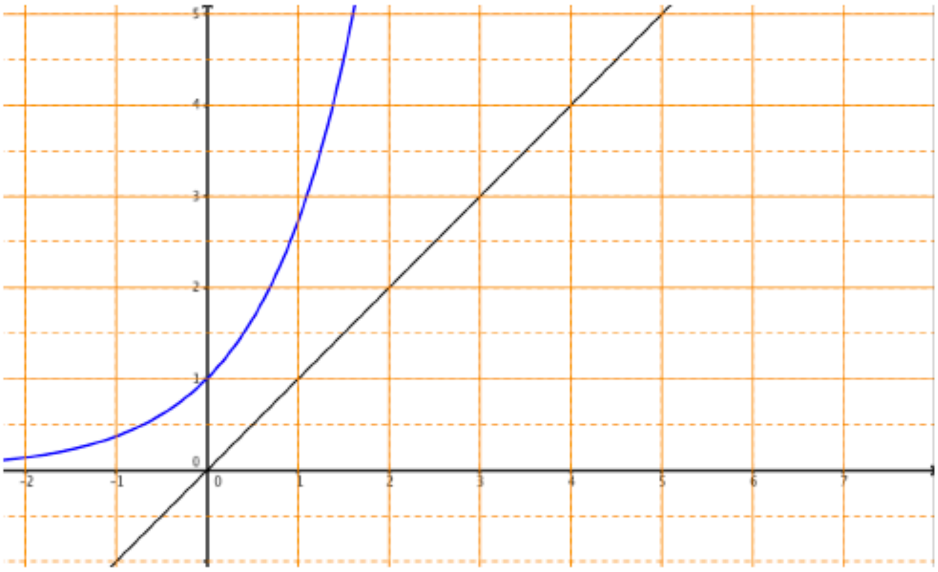
1. **a.** Vérifier sur un autre exemple la propriété énoncée ci-dessus (en gras).
   b. Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?
   c. Quel nombre doit-on écrire en face de 21 ?
2. **a.** Quand on divise deux nombres de la colonne de gauche, que peut-on dire des nombres de la colonne de droite ?
   b. Déduire de la question précédente les nombres à écrire en face de 1,5 ; 0,5 ; 0,1.
3. Pour désigner les nombres de la colonne de gauche, on invente le mot **logarithme**, forgé à partir de deux mots grecs *logos* (rapport) et *arithmos* (nombre entier naturel). En effet, si les nombres de gauche sont dans un rapport constant (c'est-à-dire en progression géométrique) alors ceux de droite sont à différence constante (c'est-à-dire en progression arithmétique).
   Vérifier cette propriété en considérant dans la première colonne les nombres 1, 2, 4, 8, 16.
4. **a.** Quand on élève un nombre au carré, que peut-on dire de son logarithme ?
   b. En déduire le logarithme de 100.
5. **a.** Quand on prend la racine carrée d'un nombre, que peut-on dire de son logarithme ? Vous justifierez votre réponse.
   b. En déduire le logarithme de $\sqrt{5}$.

Ainsi, cette table ramène les multiplications à des additions, les divisions à des soustractions, les extractions de racine carrée à des divisions par 2...
Un disciple de Neper, **Briggs**, publie en 1617 une autre table ayant les mêmes propriétés mais plus commodes pour les calculs : les **logarithmes décimaux**.
Cinquante ans plus tard, l'invention du calcul différentiel (dérivées, intégrales...) par Newton et Leibniz permettra de découvrir que, en plus de ses propriétés pratique, la fonction logarithme de Neper a un intérêt théorique considérable : non seulement elle a une dérivée remarquable, mais elle a un lien étroit avec la fonction exponentielle !

Activité 2 *- Le logarithme Népérien -*

A Une approche graphique.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction exponentielle ainsi que la droite d'équation $y = x$.



1. a. Déterminer graphiquement un réel t_1 tel que $e^{t_1} = \frac{1}{2}$. Construire le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,t_1\right)$ en rouge sur le graphique de l'annexe.
   b. Déterminer graphiquement un réel t_2 tel que $e^{t_2} = 1$. Construire le point de coordonnées $(1\,;\,t_2)$ en rouge sur le graphique de l'annexe.
   c. Déterminer graphiquement un réel t_3 tel que $e^{t_3} = 2$. Construire le point de coordonnées $(2\,;\,t_3)$ en rouge sur le graphique de l'annexe.
   d. Déterminer graphiquement un réel t_4 tel que $e^{t_4} = 5$. Construire le point de coordonnées $(5\,;\,t_4)$ en rouge sur le graphique de l'annexe.
2. a. Montrer que l'on peut définir une fonction * sur $]0;+\infty[$ en associant à tout réel strictement positif m un réel t tel que $exp(t) = m$.
   b. Proposer une construction de la courbe représentative de cette nouvelle fonction.

Remarque : **Euler** définira la fonction logarithme népérien comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle : pour tout réel x et tout réel y strictement positif, si $y = e^x$ alors x est le logarithme népérien de y.

B Relation fonctionnelle.

On a pour tout réel $y > 0$

$$e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y, \text{ d'où } e^{\ln y} = y$$

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Simplifier l'écriture de $e^{\ln ab}$ et $e^{\ln a + \ln b}$.
2. Que peut-on en déduire ?
3. Sur la calculatrice, afficher le tableau de valeurs de la fonction $x \mapsto \ln x$. Le comparer au tableau donné dans l'activité 1.

*. Définir une fonction f sur D_f, c'est associer à tout réel x de D_f un unique réel y, noté $f(x)$.