TD 4 (3 PAGES)

Exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x^2 - \ln x$

b. $g(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$

c. $h(x) = (x+2)(\ln x)^2$

d. $F(x) = x^2 \ln x$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ *par :*

$$g(x) = x^2 \ln x + x$$

Déterminer en quel point de la courbe $\mathscr{C}_g$ *la tangente :*

1. *passe par l'origine du repère ;*
2. *soit parallèle à la droite d'équation* $y = x$.

Exercice 3

On considère la fonction f *définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $f(x) = 3x - 3x\ln x$.
On note $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative dans un repère orthogonal et* $\mathscr{T}$ *sa tangente au point A d'abscisse 1.*
Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{T}$.

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes en 0 et en $+\infty$ *:*

a. $\dfrac{\ln x}{x+1}$

b. $\dfrac{1}{x} - \ln x$

b. $\dfrac{x}{\ln x}$

Exercice 5

Pour chacune des fonctions suivantes, dresser le tableau de variations complet de la fonction sur son ensemble de définition. Vous préciserez les éventuelles asymptotes et tangentes horizontales à la courbe représentative.

a. $f(x) = x - \ln x$

b. $g(x) = x \ln x$

c. $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

d. $F(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = 2x + \frac{3\ln x}{x^2} \text{ et } g(x) = 2x^3 - 6\ln x + 3$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unités : 2cm pour 1 unité en abscisses et 1cm pour 5 unités en ordonnées.)

1. Etude de la fonction g.

a. *Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.*

b. *Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$.*

c. *En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.*

2. Etude de la fonction f.

a. *Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.*

b. *Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

c. *Soit Δ la droite d'équation $y = 2x$.*

i. *Déterminer la limite de $f(x) - 2x$ en $+\infty$.*

ii. *Interpréter graphiquement ce résultat.*

iii. *Préciser la position relative de Δ et $\mathscr{C}$*

d. *Démontrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

e. *Dresser le tableau de variations de f.*

f. *Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ ainsi que Δ.*

Exercice 7

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + \ln x - 2$$

.

1. Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g.
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$ que l'on notera α
   b. Justifier que $1 < \alpha < 2$.
3. En déduire le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé dont l'unité est 3cm.

1. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = x - 1 - x\ln(x)$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
   c. En déduire le tableau de variations de g. On précisera la valeur de $g(1)$.
   d. En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.
2. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   c. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-1)^2}$.
   d. Dresser le tableau de variation de f.