TD 7 (2 PAGES)

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

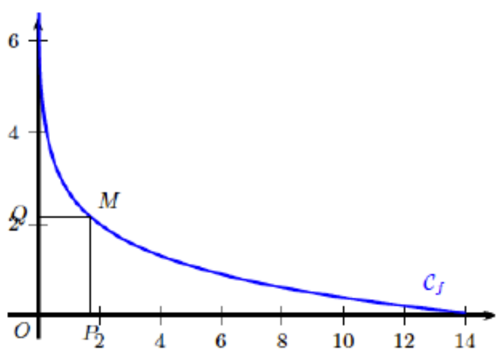
1. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
2. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Ecrire un algorithme qui affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



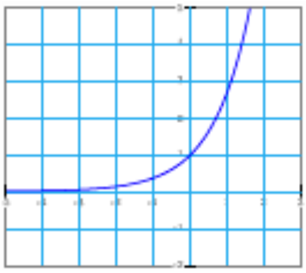
À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

Exercice 3

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}_m$.
2. Démontrer cette conjecture.