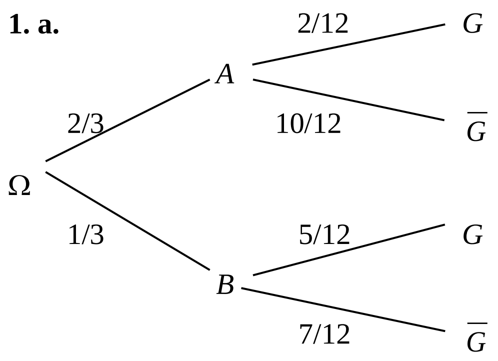
T-S Corrigé du DS5 de MATHÉMATIQUES 13 / 01 / 2017

EXERCICE 3 **1. a.**



2. a. La probabilité de tirer un jeton gagnant et se trouvant dans l'urne A est $p(G\cap A)$. Or $p(G\cap A)=p(A)\times p_A(G)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$. Donc $p(G\cap A)=\frac{1}{9}$.

b. Les événements A et B réalisent une partition de l'univers, par la formule des probabilités totales, $p(G)=p(G\cap A)+p(G\cap B)$.

Or $p(G\cap B)=p(B)\times p_B(G)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{36}$.

Donc $p(G)=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}=\frac{9}{36}$. Ainsi $p(G)=\frac{1}{4}$.

c. Si le jeton tiré est gagnant, la probabilité qu'il soit tiré de l'urne A est $p_G(A)$.

Or $p_G(A)=\frac{p(G\cap A)}{p(G)}=\frac{1}{9}\times\frac{4}{1}$ et donc $p_G(A)=\frac{4}{9}$.

d. $p(A)\times p(G)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$ et $p(G\cap A)=\frac{1}{9}$. Alors $p(A)\times p(G)\neq p(G\cap A)$, les événements A et G ne sont pas indépendants ?

3. a. Le joueur mise au départ 2 Euros. Alors le joueur perd 2 euros s'il ne tire pas un jeton gagnant, sinon il gagne en réalité 3 ou 8 Euros, la mise étant déduite. Ainsi les valeurs prises par ce gain sont -2 , 3 et 8. On a donc $X(\Omega)=\{-2\,;3\,;8\}$.

b. L'événement $(X=3)$ correspond à « *tirer un jeton gagnant de l'urne A* » donc à l'événement $G\cap A$. Donc $p(X=3)=\frac{1}{9}$.

c. De même $(X=8)$ correspond à $G\cap B$. Donc $p(X=8)=\frac{5}{36}$.

Comme $p(X=3)+p(X=8)+p(X=-2)=1$, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Événements	x_i	$p_i=p(X=x_i)$	$p_i\times x_i$
$\overline{G}$	-2	$\frac{3}{4}=\frac{27}{36}$	$-\frac{54}{36}$
$A\cap G$	3	$\frac{1}{9}=\frac{4}{36}$	$\frac{12}{36}$
$B\cap G$	8	$\frac{5}{36}$	$\frac{40}{36}$
Total	–	1	$-\frac{1}{18}$

d. L'espérance mathématique de X est $E(X)=\sum p_i\times x_i$ donc

$$E(X)=-2\times\frac{3}{4}+3\times\frac{1}{9}+8\times\frac{5}{36}=\frac{-54+12+40}{36}=-\frac{1}{18}.$$

L'espérance est négative donc le jeu n'est pas avantageux pour le joueur.

T-S Corrigé du DS5 de mathématiques 19/01/18

EXERCICE 1

1. $f(x)=\frac{3-5x}{x^2+1}$ en $+\infty$: La fonction f est une fonction rationnelle, donc sa limite en $+\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré,

i.e. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{x}=0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-5x}{x^2+1}=0}$

3. $f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$ en 3 par valeurs supérieures : Utilisons l'expression conjuguée du numérateur : si $x>3$, $\sqrt{2x+3}$ existe et $\sqrt{2x+3}+3>0$.

$$\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}=\frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2x+3-9}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}$$

$$\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}=\frac{2x-6}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=\frac{2(x-3)}{(3-x)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=-\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} 2x+3=9\\ \lim\limits_{X\to 9}\sqrt{X}=3\end{array}\right\}\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\sqrt{2x+3}=3$$ par composition.

Puis, par limite de somme et de quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}=-\frac{1}{3}}$

EXERCICE 3

1) « A et B événements incompatibles » signifie que $A\cap B=\varnothing$, et qu'ainsi $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

En remplaçant par les données, on a : $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+a$, i.e. $a=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, i.e. $\boxed{a=\frac{1}{12}}$.

2) « A et B événements indépendants » signifie que $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$,

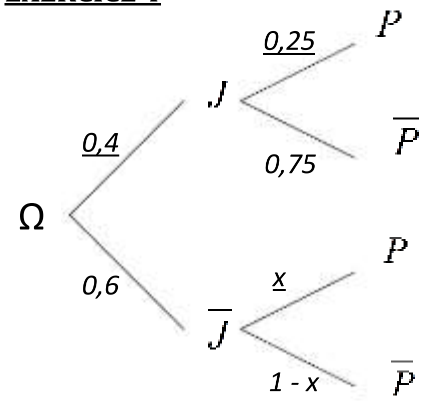
et de plus, on sait que $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$,

donc $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A)\times p(B)$.

En remplaçant par les données, on a : $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+a-\frac{1}{4}\times a$

i.e. $\frac{3a}{4}=\frac{1}{12}$, i.e. $\boxed{a=\frac{1}{9}}$.

EXERCICE 4



A. 1. Les deux pourcentages se traduisent par $p(J)=0,4$ et $p_J(P)=0,25$

Pour les probabilités des événements contraires, on applique : $p(\overline{J})=1-p(J)$ ...

2. L'énoncé donne $p(P)=0,2$. Or $P\cap J$ et $P\cap\overline{J}$ forment une partition de P donc, d'après le théorème des probabilités totales, on a :

$p(P)=p(P\cap J)+p\left(P\cap\overline{J}\right)=p(J)\times p_J(P)+p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(P)=$

$0,4\times 0,25+0,6\times x$.

2. L'énoncé donne $p(P)=0,2$. Or $P\cap J$ et $P\cap\overline{J}$ forment une partition de P donc, d'après le théorème des probabilités totales, on a :

$p(P)=p(P\cap J)+p\left(P\cap\overline{J}\right)=p(J)\times p_J(P)+p\left(\overline{J}\right)\times p_{\overline{J}}(P)=$

$0,4\times 0,25+0,6\times x$.

Donc l'inconnue x vérifie :

$0,2=0,4\times 0,25+0,6\times x$, i.e. $0,6x=0,1$, i.e. $\boxed{x=\frac{1}{6}}$.

3. On cherche ici $p_P(J)=\frac{p(J\cap P)}{p(P)}$, qui vaut $\frac{0,4\times 0,25}{0,2}=0,5$.

B. 1. Nous sommes ici en présence d'un schéma de Bernoulli puisqu'on effectue 500 fois la même épreuve et ces épreuves sont indépendantes.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale.

Les paramètres de cette loi sont n = 500 et $p=p(J)=0,2$.

2. On cherche ici $p(X=100)$. La calculatrice donne 0,044564...

L'arrondi au millième est **0,045**.

(*Remarque* : $p(X=100)=\binom{500}{100}\times(0,2)^{100}\times(0,8)^{400}$)

3. On cherche ici $p(X\geq 75)$. La calculatrice ne donnant pas directement ce résultat, on écrit $p(X\geq 75)=1-p(X\leq 74)$.

La calculatrice donne 0,997616… L'arrondi au millième est **0,998**.