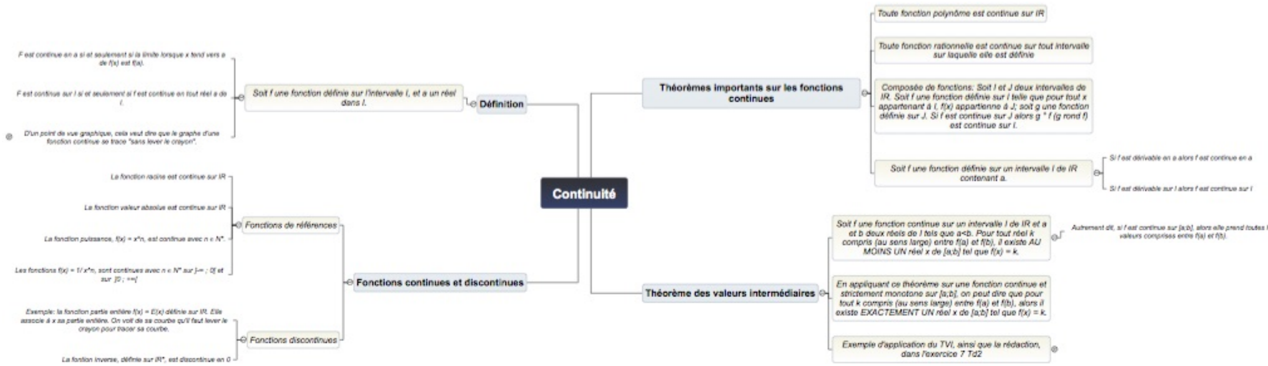
CONTINUITÉ


Continuité
Définition
Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, et a un réel dans I.
D'un point de vue graphique, cela veut dire que le graphe d'une fonction continue se trace "sans lever le crayon".
Fonctions continues et discontinues
Fonctions de références
La fonction racine est continue sur IR
La fonction valeur absolue est continue sur IR
Fonctions discontinues
Théorèmes importants sur les fonctions continues
Toute fonction polynôme est continue sur IR
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle sur laquelle elle est définie
Composée de fonctions: Soit I et J deux intervalles de IR. Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout x appartenant à I, f(x) appartienne à J; soit g une fonction définie sur J. Si f est continue sur J alors g ° f (g rond f) est continue sur I.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR contenant a.
Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR et a et b deux réels de I tels que a<b. Pour tout réel k compris (au sens large) entre f(a) et f(b), il existe AU MOINS UN réel x de [a;b] tel que f(x) = k.
En appliquant ce théorème sur une fonction continue et strictement monotone sur [a;b], on peut dire que pour tout k compris (au sens large) entre f(a) et f(b), alors il existe EXACTEMENT UN réel x de [a;b] tel que f(x) = k.
Exemple d'application du TVI, ainsi que la rédaction, dans l'exercice 7 Td2

I. Théorèmes importants sur les fonctions continues

A. Toute fonction polynôme est continue sur IR

B. Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle sur laquelle elle est définie

C. Composée de fonctions: Soit I et J deux intervalles de IR. Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout x appartenant à I, f(x) appartienne à J; soit g une fonction définie sur J. Si f est continue sur J alors g ° f (g rond f) est continue sur I.

D. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR contenant a.

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a

2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I

II. Théorème des valeurs intermédiaires

A. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de IR et a et b deux réels de I tels que a<b. Pour tout réel k compris (au sens large) entre f(a) et f(b), il existe AU MOINS UN réel x de [a;b] tel que f(x) = k.

1. Autrement dit, si f est continue sur [a;b], alors elle prend toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b).

B. En appliquant ce théorème sur une fonction continue et strictement monotone sur [a;b], on peut dire que pour tout k compris (au sens large) entre f(a) et f(b), alors il existe EXACTEMENT UN réel x de [a;b] tel que f(x) = k.

C. Exemple d'application du TVI, ainsi que la rédaction, dans l'exercice 7 Td2

1.

III. Fonctions continues et discontinues

A. Fonctions de références

1. La fonction racine est continue sur IR

2. La fonction valeur absolue est continue sur IR

3. La fonction puissance, f(x) = x^n, est continue avec n N*.

4. Les fonctions f(x) = 1/ x^n, sont continues avec n N* sur]-∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[

B. Fonctions discontinues

1. Exemple: la fonction partie entière f(x) = E(x) définie sur IR. Elle associe à x sa partie entière. On voit de sa courbe qu'il faut lever le crayon pour tracer sa courbe.

2. La fontion inverse, définie sur IR*, est discontinue en 0

IV. Définition

A. Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, et a un réel dans I.

1. F est continue en a si et seulement si la limite lorsque x tend vers a de f(x) est f(a).

2. F est continue sur I si et seulement si f est continue en tout réel a de I.

3. D'un point de vue graphique, cela veut dire que le graphe d'une fonction continue se trace "sans lever le crayon".

a) Si