TD 3 (4 PAGES)

Exercice 1

Déterminer les limites des fonctions définies par

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$; $x \in]0;+\infty[$

2) $g(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$; $x \in]0;\pi]$

3) $h(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

Exercice 2

Prouver que pour tout x réel positif,

a) $\sin x \leq x$; b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 1$.

1) Montrer que f est périodique de période π.

2) Montrer que f est paire.

3) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

4) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5) Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 4

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $3\sin x - 5x = 4$ dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$

Exercice 5

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.

2) Montrer que la fonction tangente est périodique de période π et qu'elle est impaire. En déduire un intervalle d'étude.

Exercice 6

Un solide de masse m = 0,2 kg se déplace sans frottement sur un axe horizontal, relié à un ressort de constante de raideur k = 6,6 N.m^{-1} et de masse négligeable.

Pour tout réel t positif, l'abscisse $x(t)$ du centre de gravité du solide à l'instant t est définie par $x(t) = 2\cos\left(3\sqrt{2}t\right)$.

Démontrer que, pour tout réel t positif, $x''(t) + \dfrac{k}{m}x(t) = 0$.

Cette égalité traduit la propriété suivante : Dans un mouvement rectiligne sinusoïdal, l'accélération x'' est proportionnelle à l'élongation x et de signe contraire.

Exercice 7

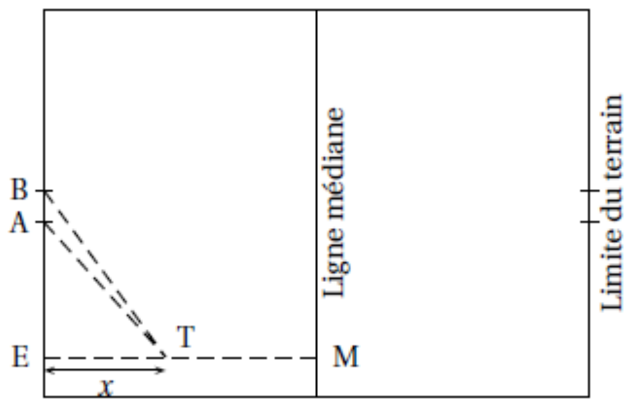
Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Terrain vu de dessus



Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle ATB est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m .

On note α la mesure en radian de l'angle$\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle$\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer tanα et tanβ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *(déjà fait dans l'exemple 7)*

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5{,}6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure *y* est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle]0; 50] de la fonction *f* définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$

Montrer qu'il existe une unique valeur de *x* pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de *x* au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

Exercice 8

1) a) Calculer $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

b) On admet que $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

2) On admet que , pour tous réels *a* et *b*, cos*a* cos*b* –sin*a* sin*b* =cos(*a* + *b*).

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels ° : $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}$

Exercice 9

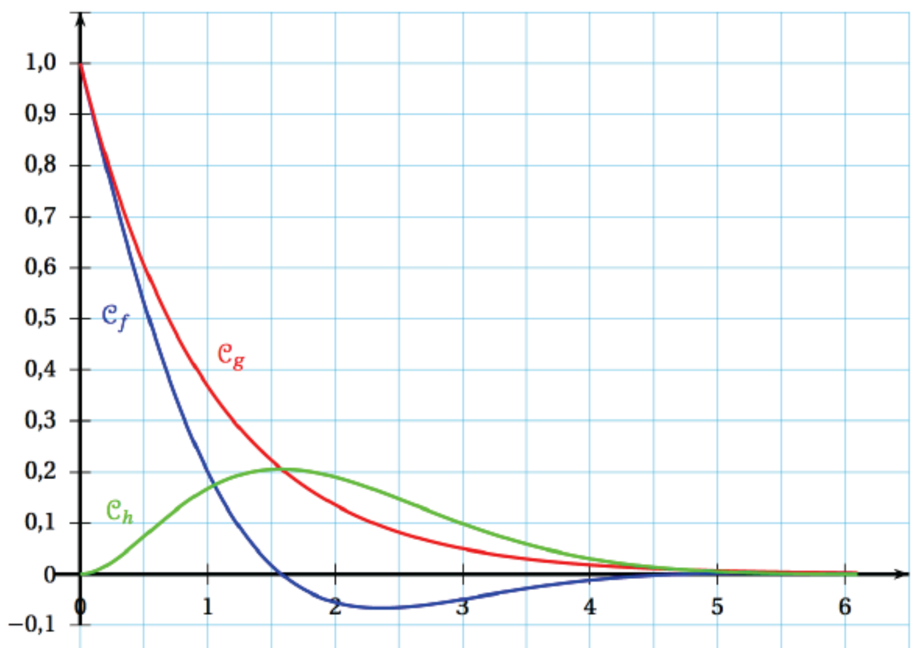
on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f *et* g *définies sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$ *par :*

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h *sur* $[0\ ;\ +\infty[$ *par* $h(x) = g(x) - f(x)$.

Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ *et* $\mathscr{C}_h$ *des fonctions* f, g *et* h *sont données, ci-dessous, dans un repère orthogonal.*



1. *Conjecturer :*
   a. *les limites des fonctions* f *et* g *en* $+\infty$;
   b. *la position relative de* $\mathscr{C}_f$ *par rapport à* $\mathscr{C}_g$;
   c. *la valeur de l'abscisse* x *pour laquelle l'écart entre les deux courbes* $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$ *est maximal.*
2. *Justifier que* $\mathscr{C}_g$ *est située au-dessus de* $\mathscr{C}_f$ *sur l'intervalle* $[0\,;\,+\infty[$.
3. *Démontrer que la droite d'équation* $y = 0$ *est asymptote horizontale aux courbes* $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$.
4. a. *On note* h' *la fonction dérivée de la fonction* h *sur l'intervalle* $[0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x *de l'intervalle* $[0\,;\,+\infty[$,
   $h'(x) = e^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]$.
   b. *Justifier que, sur l'intervalle* $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \geqslant 0$ *et que, sur l'intervalle* $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1 \leqslant 0$.
   c. *En déduire le tableau de variation de la fonction* h *sur l'intervalle* $[0\,;\,2\pi]$.