Correction - Devoir maison S

La clarté et la précision des raisonnements compteront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Soignez la rédaction !

Exercice 1

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la courbe admet la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.
2. La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$:
$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$
3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[1\,;\,+\infty[$:
$$f'(x) > 0 \iff \frac{1-\ln(x)}{x^2} > 0 \iff 1-\ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff \mathrm{e} > x \iff x < \mathrm{e}$$
Donc la fonction f est : strictement croissante sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$;
strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\, \mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1. $u_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} \ln(x)\, \mathrm{d}x \int_1^2 f(x)\, \mathrm{d}x$

   $\dfrac{1}{x}\ln(x)$ est de la forme $u'u$ qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$; donc la fonction f a pour primitive sur $[1 ; 2]$ la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}\left[\ln(x)\right]^2$.

   Donc $u_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{1}{2}\left[\ln(2)\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\ln(1)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[\ln(2)\right]^2$

   La fonction f est positive sur $[1 ; 2]$ donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2. Pour tout x de $[1 ; 2]$:
$$\begin{aligned} & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \iff & \ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) && \text{la fonction ln est croissante sur } [1 ; 2] \\ \iff & 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) \\ \iff & 0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2) && \frac{1}{x^{n+1}} > 0 \text{ sur } [1 ; 2] \end{aligned}$$

3. On a $0 \leqslant \dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

   $\displaystyle\int_1^2 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,\mathrm{d}x$ ou encore $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,\mathrm{d}x$.

   On calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\,\mathrm{d}x = \ln(2)\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.

   Pour $n > 0$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{n+1}}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{nx^n}$.

   Donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{n\times 2^n}\right) - \left(-\frac{1}{n\times 1^n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n\times 2^n} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

   Donc, pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

4. On cherche la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

   On a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ pour tout n, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 0$; on peut donc dire, d'après le théorème des gendarmes, que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.