Devoir maison S

La clarté et la précision des raisonnements compteront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Soignez la rédaction !

Exercice 1

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel[1] n, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).