Correction - Devoir maison T

Exercice 1

1. On a $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$, donc 1 est solution de (E).
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, alors :

$$\left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2.$$

3. D'après la question précédente, l'équation (E) équivaut à

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + z + 1 = 0$$

- l'équation $z^2 + z - 2 = 0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta = 9$; elle possède donc deux solutions réelles qui sont -2 et 1 ;
- l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est du second degré, à coefficients réels, son discriminant vaut $\Delta = -3$, elle possède deux solutions complexes conjuguées qui sont $-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Les solutions de (E) sont donc : -2, 1, $-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Notons :
- A le point d'affixe $a = 1$,
- B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- C le point d'affixe $c = -2$,
- D le point d'affixe $d = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les nombres complexes b et d étant conjugués, la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC) (qui n'est rien d'autre que l'axe réel). Les diagonales du quadrilatère ABCD sont donc perpendiculaires.

De plus le milieu de [AC] a pour affixe $\frac{a+c}{2} = -\frac{1}{2}$ et le milieu de [BD] a pour affixe $\frac{b+d}{2} = \frac{b+\bar{b}}{2} = \frac{2\mathrm{Ré}(b)}{2} = -\frac{1}{2}$. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent donc en leur milieu. On peut alors conclure que le quadrilatère ABCD est un losange.