EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Solution : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par C(0 ; 3 ; 2)

on obtient une représentation paramétrique de (CD) : $\begin{cases}x=t\\y=3\\z=2-t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Solution : B(4 ; −1 ; 0). Soit t le paramètre associé à M alors M(t ; 3 ; $2-t$).
Alors $BM^2=(t-4)^2+(4)^2+(2-t)^2=2t^2-12t+36=2(t^2-6t+18)$.
BM est minimale quand BM^2 l'est c'est-à-dire quand $t^2-6t+18$ est minimal.
On sait que tout polynôme de la forme at^2+bt+c avec $a>0$ admet un minimum en $t=-\dfrac{b}{2a}$
ici BM sera donc minimale pour $t=3$ soit pour M(3 ; 3 ; −1).

b. **Solution :** $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. **Solution :** D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.

On a alors $\mathcal{A}_{\text{BCD}} = \dfrac{1}{2} \times \text{CD} \times \text{BH} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{32} \times \sqrt{18} = \sqrt{144} = 12$ (en u. a.).

L'aire de BCD est donc bien de 12 cm^2.

3. **a.** **Solution :**

$\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont évidement pas colinéaires donc B, C et D définissent bien un plan.

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = -8+4+4 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{CD}} = 8+0-8 = 0$.

$\overrightarrow{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. **Solution :**

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc (BCD) : $2x + y + 2z + d = 0$.

C(0 ; 3 ; 2) appartient à (BCD) donc $2x_\text{C} + y_\text{C} + 2z_\text{C} + d = 0$ ce qui donne $d = -7$.

Finalement (BCD) : $2x+y+2z-7=0$.

c. **Solution :** Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur, on a alors

$$\Delta : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \\ z = 4+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

d. **Solution :** I est un point de (BCD) donc $2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0$

De plus $I \in \Delta$ donc il existe un réel t tel que

$2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \iff 9t=-6 \iff t=-\dfrac{2}{3}$.

On en déduit $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$.

Remarque : on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD).

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD.

$AI=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=2.$

$\mathcal{V}_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times AI\times \mathcal{A}_{BCD}=8$ (en cm^3).

Le volume du tétraèdre est 8 cm^3.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Comme A est l'origine du repère, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont égales aux coordonnées de B, et donc la droite (AB), passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= 10k \\ y &= -8k \\ z &= 2k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\big(14-(-1)\,;\,4-(-8)\,;\,8-5\big)$ soit $(15\,;\,12\,;\,3)$.

   La droite (CD) passant par C et dirigée par $\overrightarrow{CD}$ admet donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -1+15l \\ y &= -8+12l \\ z &= 5+3l \end{cases}$ $l \in \mathbb{R}$.

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont clairement non colinéaires (leurs abscisses ont le même signe, mais pas leurs ordonnées), donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

   Voyons si elles ont un point commun, en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 10k &= -1+15l \\ -8k &= -8+12l \\ 2k &= 5+3l \end{cases} \iff \begin{cases} 5(5+3l) &= -1+15l \\ -4(5+3l) &= -8+12l \\ 2k &= 5+3l \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 25+15l &= -1+15l \\ -20-12l &= -8+12l \\ 2k &= 5+3l \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 26 &= 0 \\ -20-12l &= -8+12l \\ 2k &= 5+3l \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, et donc il n'y a aucun point commun aux deux droites, donc elles ne sont pas sécantes.

Finalement, puisque ces droites ne sont ni confondues, ni parallèles, ni sécantes, par élimination on en déduit qu'elles sont effectivement non coplanaires.

2. a. Si I est sur (AB), alors il existe un paramètre k lui correspondant. Puisque son abscisse est 5, cela donne $10k = 5$, soit $k = 0,5$. I est donc le point de paramètre $k = 0,5$ sur (AB), donc ses coordonnées sont : $(5\,;\,-8\times 0,5\,;\,2\times 0,5)$ soit $(5\,;\,-4\,;\,1)$.

De façon analogue J est le point de paramètre $l = \dfrac{1}{3}$ sur (CD), ce qui donne les coordonnées suivantes pour J $(4\,;\,-4\,;\,6)$.

Le repère de l'espace étant orthonormé, on a alors : $\text{IJ} = \sqrt{(4-5)^2+(-4-(-4))^2+(6-1)^2}$ soit $\text{IJ} = \sqrt{26}$.

b. Le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer un produit scalaire.

$\overrightarrow{\text{IJ}}$ a pour coordonnées $(-1\,;\,0\,;\,5)$ et donc on a :

$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}} = 10\times(-1)+(-8)\times 0+2\times 5 = -10+0+10 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, et donc les droites qu'ils dirigent, (AB) et (IJ) sont orthogonales.

Par définition de I, ces droites ont également I comme point commun, donc elles sont bien perpendiculaires.

De façon analogue : $\overrightarrow{\text{CD}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}} = 15\times(-1)+12\times 0+3\times 5 = -15+0+15 = 0$ (CD) et (IJ) sont donc également orthogonales, avec J comme point commun, par définition de J, et donc elles sont bien perpendiculaires.

3. a. Le point I étant sur (AB) qui est non coplanaire avec (CD), on en déduit que I n'est pas un point de (CD), et donc que les points C, D et I définissent un plan.

J étant un point de (CD), il est un point de (CDI).

Δ étant parallèle à (CD) — incluse dans (CDI) — et passant par I — appartenant à (CDI) — on en déduit que la droite Δ est bien une droite de (CDI).

De même, la parallèle à (IJ) passant par M' est parallèle à (IJ) — droite de (CDI)— et passe par M' — point de (CD), donc du plan (CDI) — donc cette droite est aussi dans le plan (CDI).

Finalement, on a établi que les droites Δ et la parallèle à (IJ) passant par M' sont coplanaires.

Comme (IJ) est perpendiculaire à (CD), toute parallèle à (IJ) sera orthogonale à (CD), et donc la parallèle à (IJ) passant par M' est orthogonale à (CD), et donc ne lui est pas parallèle.

Par élimination, les droites étant coplanaires et non parallèles, elles sont bien sécantes, et donc le point P est bien défini.

b. Les droites (AB) et Δ ont I comme point commun, par définition de Δ, et elles ne sont pas confondues, sinon, par transitivité du parallélisme, (AB) et (CD) seraient parallèles, ce qui est exclu depuis la question **1. b.**. Ces deux droites sont donc sécantes, et elles définissent donc un plan $\mathscr{P}$ (qui est matérialisé par un parallélogramme sur la figure du sujet).

La droite (IJ) est perpendiculaire à (AB), et elle est perpendiculaire à (CD), ce qui implique, puisque Δ est parallèle à (CD) que (IJ) est orthogonale à Δ (elle lui est même perpendiculaire en I). On peut donc en conclure que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$, et donc que $(M'P)$ qui est parallèle à (IJ) est également perpendiculaire à $\mathscr{P}$, donc $(M'P)$ est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathscr{P}$, notamment à (PM) (qui est bien une droite de $\mathscr{P}$, puisqu'elle relie deux points sur les droites définissant le plan).

Finalement, on a établi que les droites $(M'P)$ et (PM) sont orthogonales, et donc perpendiculaires en P, donc le triangle $M'PM$ est un triangle rectangle en P.

c. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long, donc $MM' > M'P$ et comme IJ$M'P$ est un parallélogramme, IJ $= M'P$ et donc on a bien $MM' >$ IJ.

En éludant le cas où M est distinct de I et M' est confondu avec J ou le cas croisé où M est confondu avec I et M' distinct de J (situations qui ne présentent pas de difficulté supplémentaire, mais qui demanderait une rédaction allongée), on va conclure :

On a bien démontré que, pour tout point M de (AB) et pour tout point M' de (CD), la distance MM' est supérieure ou égale à la distance IJ, et donc cette distance IJ est bien la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

EXERCICE 2 — 3 POINTS

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

1. **a.** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{\text{OI}}$.

   La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

   b. On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\boxed{x = 11}$.

   c. (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Le point d'intersection E a des coordonnées $(x\,;\, y\,;\, z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

On doit avoir : $\left\{\begin{array}{l} x=11 \\ x=t \\ y=-1 \\ z=5 \end{array}\right.$ donc $\boxed{\text{E}(11\,;\,-1\,;\,5)}$.

d. Une représentation paramétrique de (AB) est $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=-1 \\ z=5 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et une représentation paramétrique de (CD) est $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 11 \\ y &=& 0{,}8t' \\ z &=& 1+0{,}6t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$. On résout le système $\left\{\begin{array}{lll} t &=& 11 \\ -1 &=& 0{,}8t' \\ z &=& 1+0{,}6t' \end{array}\right.$ qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1+0{,}6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. **a.** $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix} 11-t \\ 0{,}8t+1 \\ 0{,}6t-4 \end{pmatrix}$ donc $M_tN_t^2 = (11-t)^2 + (0{,}8t+1)^2 + (0{,}6t-4)^2$

$= 121 - 22t + t^2 + 0{,}64t^2 + 1{,}6t + 1 + 0{,}36t^2 - 4{,}8t + 16 =$

$\boxed{M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138}$.

b. M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t \longmapsto 2t^2 - 25{,}2t + 138$; f est une fonction du second degré; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t = \dfrac{25{,}2}{4} = 6{,}3$.

La distance est **minimale** pour $\boxed{t = 6{,}3 \text{ s}}$

Exercice 3 **Candidats n'ayant pas suivi la spécialité** **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

— les points $A(0\,;\,1\,;\,-1)$ et $B(-2\,;\,2\,;\,-1)$.

— la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. La droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x;\,y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires doc tels que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2-0;\,2-1;\,-1-(-1) = (-2;\,1;\,0)$.

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-0;\,y-1;\,z-(-1) = (x;\,y-1;\,z+1)$.

$$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k \\ y-1 &=& k \\ z+1 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k \\ y &=& 1+k \\ z &=& -1 \end{array}\right.$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k \\ y &=& 1+k \\ z &=& -1 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{R}$

2. a. La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(-2;\,1;\,0)$.

La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(1;\,1;\,-1)$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles.

b. Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2+t &=& -2k \\ 1+t &=& 1+k \\ -1-t &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2 &=& -2k \\ 0 &=& k \\ t &=& 0 \end{array}\right.$$ Il n'y a donc pas de solution.

Les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécantes.

Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z-3u=0$.

$x_M + y_M - z_M - 3u = -2+u+1+u-(-1-u)-3u = -2+u+1+u+1+u-3u = 0$ donc $M \in \mathscr{P}$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1;\,1;\,-1)$, qui est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$; donc le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

4. Pour déterminer si le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2k \\ y=1+k \\ z=-1 \\ x+y-z-3u=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2k \\ y=1+k \\ z=-1 \\ -2k+1+k+1-3u=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-2(2-3u) \\ y=1+2-3u \\ z=-1 \\ 2-3u=k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-4+6u \\ y=3-3u \\ z=-1 \\ 2-3u=k \end{array}\right.$$

Donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont sécants au point $N(-4+6u;\,3-3u;\,-1)$.

5. a. La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale en M au plan $\mathscr{P}$; donc la droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire à toute droite du plan $\mathscr{P}$ passant par M, donc elle est perpendiculaire à la droite (MN) contenue dans $\mathscr{P}$ puisque $N \in \mathscr{P}$.

b. La droite (MN) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MN}$ de coordonnées

$(-4+6u-(-2+u);\,3-3u-(1+u),;\,-1-(-1-u)) = (-2+5u;\,2-4u;\,u)$.

La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2;\,1;\,0)$.

Les droites (MN) et (AB) sont orthogonales si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{MN}$ et de $\overrightarrow{AB}$ est nul.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = (-2+5u)\times(-2)+(2-4u)\times 1+u\times 0 = 4-10u+2-4u = 6-14u$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = 0 \iff 6 - 14u = 0 \iff \dfrac{3}{7} = u$

De plus, les droites (MN) et (AB) sont sécantes en M; elles sont donc perpendiculaires si et seulement si $u = \dfrac{3}{7}$.

6. **a.** $MN^2 = \| MN \|^2 = (-2+5u)^2 + (2-4u)^2 + u^2 = 4-20u+25u^2+4-16u+16u^2+u^2 = 42u^2-36u+8$

b. MN^2 est un trinôme du second degré en u de la forme $au^2 + bu + c$, et le coefficient de u^2 est $a = 42 > 0$; ce polynôme admet donc un minimum pour $u = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-36}{2 \times 42} = \dfrac{3}{7}$.

La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal, c'est-à-dire pour $u = \dfrac{3}{7}$.