Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2\,;1\,;4)$, $(4\,;-1\,;0)$, $(0\,;3\,;2)$ et $(4\,;3\,;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2. Soit M un point de la droite (CD).
   a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
   b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3\,;3\,;-1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.
3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
   d. Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points B(10 ; −8 ; 2), C(−1 ; −8 ; 5) et D(14 ; 4 ; 8).

1. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

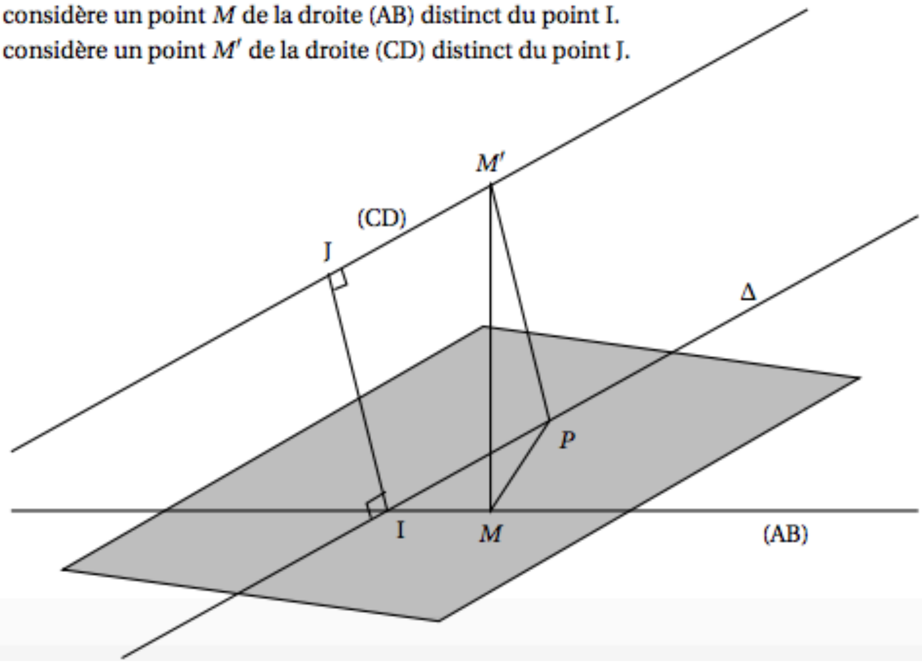
   b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

   a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

   b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
   La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
   Sur le schéma ci -dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
   On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
   On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



   a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

   b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

   c. Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1\,;\,5)$ et
$N_t(11\,;\,0,8t\,;\,1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point E(11 ; −1 ; 5).
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :
— les points A(0 ; 1 ; −1) et B(−2 ; 2 ; −1).
— la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -1-t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. **a.** Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.
   b. Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel.
On considère le point M de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-2+u\,;\,1+u\,;\,-1-u)$.

3. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z - 3u = 0$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et passe par le point M.
4. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\,;\,3-3u\,;\,-1)$.
5. **a.** Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.
   b. Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
6. **a.** Exprimer MN^2 en fonction de u.
   b. En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.